Vers une axiomatisation de la théorie des catégories supérieures

Bertrand Toën
Laboratoire Emile Picard
UMR CNRS 5580
Université Paul Sabatier, Toulouse
France

March 2005

Résumé

On définit une notion axiomatique de *théorie de* $(1,\infty)$*-catégories.* On démontre qu'une telle théorie est unique à équivalence (essentiellement unique) près.

Table des matières

1 Introduction

La théorie des catégories supérieures a connu ces derniers temps un regain d'intérêt, et il existe aujourd'hui au moins une dizaine de définitions différentes de n-catégorie (voir par exemple [Le]). Une question fondamentale est bien entendu de les comparer. De prime abord cette question ne parraît pas tout à fait évidente à poser correctement, car il est bien connu que les n-catégories doivent elles-même former une $(n+1)$-catégorie, et de ce fait comparer deux théories de n-catégories demanderait à savoir déjà comparer les notions de $(n+1)$-catégories de ces mêmes théories. Cette *poursuite des catégories* ne semble mener nulle part.

Cependant, il semble maintenant admis qu'avant même de former une $(n+1)$-catégorie, les n-catégories doivent former une catégorie de modèles, ou tout au moins une certaine sous-catégorie raisonable. Ce point de vue, en plus d'être particulièrement efficace pour développer des théories de n-catégories (voir par exemple [Jo, Hi-Si, Pe]), possède aussi l'avantage de permettre de poser clairement la question de la comparaison entre deux théories: on dira que deux théories de n-catégories sont équivalentes si les catégories de modèles correspondantes sont équivalentes au sens de Quillen. Suivant cette idée, P. May a récemment proposé un vaste programme de recherche consistant à construire des équivalences de Quillen entre les différentes théories de n-catégories.

La but de cet article et d'amorcer ce travail de comparaison en essayant de dégager des axiomes caractérisant, à équivalence de Quillen près, "la" catégorie de modèles des n-catégories [1].

$(1,\infty)$-Catégories

Dans cet travail, nous ne nous intéresserons pas à la théorie des n-catégories pour n quelconque (pouvant être infini), mais au cas particulier des $(1,\infty)$-*catégories*. De façon intuitive, les $(1,\infty)$-catégories sont des ∞-catégories pour les quelles les ∞-catégories de morphismes entre deux objets fixés sont des ∞-groupoides. Autrement dit, une ∞-catégorie est une $(1,\infty)$-catégorie si tous ses i-morphismes sont inversibles pour $i > 1$. Il se trouve que de très nombreuses ∞-catégories que l'on rencontre dans la nature sont des $(1,\infty)$-catégories, et ceci car toute ∞-catégorie obtenue à partir d'une (1-)catégorie en inversant formellement un certain ensemble de flèches est de ce type. La théorie des $(1,\infty)$-catégories et de ce fait riche d'exemples. De plus, il existe déjà plusieurs notions modèlisant les $(1,\infty)$-catégories et qui forment des catégories de modèles, comme par exemple les catégories simplicialement enrichies, les 1-catégories de Segal, les quasi-catégories ou encore les espaces de Segal complets (voir [Be, Hi-Si, Jo, Re, Pe]). Ces différentes théories ne sont pour le moment pas comparées, bien que conjecturalement équivalentes.

[1] L'idée que ces axiomes puissent exister n'est pas nouvelle (voir [Si]).

Théories de $(1, \infty)$*-catégories*

La notion fondamentale de ce travail est celle de *théorie de* $(1, \infty)$*-catégories*. Une telle théorie est par définition la donnée d'une catégorie de modèles M et d'un objet co-simplicial C dans M, tel que certains axiomes $A1 - A7$ soient vérifiés (voir Def. 4.2 pour plus de détails). Nous ne reproduirons pas ces axiomes dans cette introduction, mais signalons qu'ils sont des analogues des axiomes de type Giraud caractérisant le topos des ensembles[2]. La nouveauté dans le contexte des $(1, \infty)$-catégories est l'existence de l'objet co-simplicial C, qui joue le rôle de la catégorie I ayant deux objets et un unique morphisme entre eux munie de sa structure de co-catégorie. Cet objet permet de définir la notion de quotient d'une *relation catégorique* dans M, qui est une extension de celle de quotient par des objets en groupoides. Une fois cette notion dégagée, les axiomes $A1 - A5$ sont essentiellement les axiomes de Giraud (au sens des topoi de modèles de [HAGI]) mais où l'effectivité des relations d'équivalences est remplacée par une effectivité des relations catégoriques. Les deux derniers axiomes A6 et A7 sont spécifiques à notre cas, et sont des conditions de génération et non dégénérescence.

Un exemple de théorie des $(1, \infty)$-catégories est fournit par la catégorie de modèles CSS des espaces de Segal complets de C. Rezk (voir [Re]). Le théorème principal de ce travail est le suivant.

Théorèm 1.1 *Toute théorie de* $(1, \infty)$*-catégories est équivalente (au sens de Quillen) à* CSS*.*

Dans le dernier paragraphe nous présentons aussi un argument qui montre que la théorie de $(1, \infty)$-catégories CSS ne possède pas d'auto-équivalences. Précisemment, nous montrons que la localisée simpliciale $LCSS$, en tant qu'objet de la catégorie de modèles des S-catégories ne possèdent aucune auto-équivalences fixant la sous-catégorie $\Delta \hookrightarrow LCSS$. On déduit de ceci que le seules auto-équivalences de $LCSS$ sont celles induites par des auto-équivalences de la catégorie Δ, qui sont réduites au groupe $\mathbb{Z}/2$ (voir Thm. 6.3). Ceci complète le théorème 1.1 et implique que si M est une théorie de $(1, \infty)$-catégories alors il existe essentiellement une unique équivalence entre les théories homotopiques associées à M et à CSS.

Relations avec d'autres travaux

Une première source d'inspiration pour ce travail a étée l'article [Si], dans lequel des propriétés conjecturalement caractéristiques de la théorie des n-catégories sont énoncées.

[2]Le topos des ensembles est caractérisé par les axiomes de Giraud plus l'axiome affirmant que l'objet final $*$ est non vide et générateur.

Cependant, nos axiomes sont très différents que ceux de [Si], et on ne peut raisonablement considérer notre théorème 1.1 comme une réponse possible à la conjecture principale (Conjecture 3) de [Si].

Ma seconde source d'inspiration fût les quelques discussions que j'ai pu avoir avec G. Vezzosi autour des questions *Qu'est-ce qu'une topologie sur une* n*-catégorie ?* et *Qu'est-ce qu'un* n*-topos ?* Ce sont ces discussions qui m'ont donné une idée de la forme que les axiomes de Giraud devraient avoir dans le contexte des catégories supérieures. Ainsi, les axiomes $A1 - A5$ de la définition 4.2 donnent une petite idée sur ce que pourrait être un $(2,\infty)$*-topos* (en supposant par convention que les $(1,\infty)$*-topoi* sont les topoi de modèles de [HAGI]), bien que la forme actuelle de ces axiomes doivent probablement être légèrement modifiée afin d'être plus facilement *internalisables*.

Enfin, pour ce qui est du problème de la comparaison des différentes théories de n-catégories, je n'ai pas vérifié en détails que les catégories de modèles des catégories simpliciales, des quasi-catégories et des 1-catégories de Segal étaient des théories de $(1,\infty)$-catégories. Cela ne semble pas très difficile mais n'est pas tout à fait évident non plus, et demanderait un article en soit (le point délicat semble être l'axiome $A5$). Quand à l'extension de la notion de théorie de $(1,\infty)$-catégories au cas des (n,∞)-catégories (i.e. des ∞-catégories dont les i-morphismes sont inversibles dès que $i > n$), il semble clair que cela doit passer tout d'abord par une notion de n-intervalle, qui devrait être un objet multi-co-simplicial $\Delta^n \longrightarrow M$ satisfaisant certaines propriétés (comme par exemple être une n-co-catégorie faible). Une fois cette notion dégagée la généralisation des axiomes $A1 - A7$ à ce contexte me parrait un exercice académique. Il est donc tout à fait raisonable de penser généraliser le théorème 1.1 au contexte des (n,∞)-catégories sans trop de problèmes. Cependant, montrer que les notions de n-catégories décrites dans [Le] vérifient les axiomes des théories de (n,∞)-catégories est une autre histoire.

Remerciements

Je voudrais remercier J. Lurie et G. Vezzosi pour plusieurs discussions autour de la notion de topos supérieurs, qui ont inspiré en partie ce travail.

Je tiens aussi a remercier le rapporteur pour ces remarques, et pour m'avoir signaler un argument incomplet dans la preuve du théorème principal.

Conventions et notations: Nous utiliserons l'expression *cmf* pour signifier *catégorie de modèles fermée*, et ce au sens de [Ho]. La cmf des ensembles simpliciaux sera notée $SEns$. Pour une cmf M, nous noterons $Ho(M)$ sa catégorie homotopique, et l'ensemble des morphismes entre deux objets x et y dans $Ho(M)$ sera noté $[x,y]_M$ (ou encore $[x,y]$ s'il n'y a pas d'ambiguité). Les *espaces de morphismes*, tel que definis dans [Ho, §5],

entre deux objets x et y dans M seront notés $Map_M(x,y)$ (ou encore $Map(x,y)$ s'il n'y a pas d'ambiguité), et toujours considérés comme objets de la catégorie homotopique $Ho(SEns)$. Les objets $Map(x,y)$ font de $Ho(M)$ une catégorie enrichie dans $Ho(SEns)$. Cet enrichissement est de plus fermé, au sens où il existe pour $K \in Ho(SEns)$ et $x, y \in Ho(M)$ des objets $K \otimes^{\mathbb{L}} x \in Ho(M)$ et $y^{\mathbb{R}K}$ et des isomorphismes fonctoriels

$$Map_{SEns}(K, Map_M(x,y)) \simeq Map_M(K \otimes^{\mathbb{L}} x, y) \simeq Map_M(x, y^{\mathbb{R}K}).$$

Les produits fibrés homotopiques dans M seront notés $x \times^h_z y$ (en particulier nous noterons $x \times^h y$ le produit homotopique). De même, les sommes amalgamées homotopiques seront notées $x \coprod^{\mathbb{L}}_z y$.

Enfin, nous dirons que deux cmf sont *Quillen-équivalentes* s'il existe une chaine d'équivalences de Quillen entre les deux (dans des directions arbitraires).

2 Catégories de modèles internes

Commençons par rappeler l'existence de la notion de cmf monoidale. Pour cela nous renvoyons à [Ho, §4].

Définition 2.1 *Une cmf est* interne *si le produit direct en fait une cmf monoidale.*

En clair, une cmf M est interne si elle vérifie les deux conditions suivantes.

- La catégorie M est cartésiennement close. En d'autres termes, pour deux objets x et y dans M, le foncteur $z \mapsto Hom(z \times x, y)$ est représentable par un objet $\underline{Hom}_M(x,y) \in M$.
- Pour toute paire de cofibrations

  $$u : x \longrightarrow y \qquad v : a \longrightarrow b,$$

  le morphisme

  $$u \square v : x \times b \coprod_{x \times a} y \times a \longrightarrow y \times b$$

  est une cofibration, qui est de plus une cofibration triviale si u ou v est une cofibration triviale.

Le lecteur remarquera que nous n'avons pas mentioné l'axiome habituel des cmf monoidales concernant l'unité (voir [Ho, §4]). En effet, il se déduit du deuxième axiome ci-dessus de la façon suivante. Soit x un objet cofibrant, et $Q(*) \to *$ un remplacement cofibrant de $*$. Soit $x \to x'$ un remplacement fibrant de x. Comme $Q(*)$ est cofibrant, le morphisme induit

$$Q(*) \times x \longrightarrow Q(*) \times x'$$

est une cofibration triviale et en particulier une équivalence. De plus, x' étant fibrant, le morphisme induit

$$Q(*) \times x' \longrightarrow * \times x' \simeq x'$$

est une fibration triviale, et donc une équivalence. Le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} Q(*) \times x \arrow[r] \arrow[d] & x \arrow[d] \\ Q(*) \times x' \arrow[r] & x' \end{tikzcd}$$

montre alors que $Q(*) \times x \longrightarrow x$ est une équivalence.

Lorsque M est une cmf interne, les Hom internes dérivés sont des Hom internes pour la catégorie homotopique $Ho(M)$ (voir [Ho, §4]). De plus, ces Hom internes sont compatibles avec l'enrichissement naturel de $Ho(M)$ dans $Ho(SEns)$, au sens qu'il exite des isomorphismes fonctoriels dans $Ho(SEns)$

$$Map(z \times^h x, y) \simeq Map(z, \mathbb{R}\underline{Hom}_M(x, y)).$$

Une conséquence (presque) immédiate de ceci est que pour tout diagramme d'objets de M, $x_\bullet : I \longrightarrow M$, le morphisme naturel

$$Hocolim_{i\in I}(x_i \times^h y) \longrightarrow (Hocolim_{i\in I} x_i) \times^h y$$

est un isomorphisme dans $Ho(M)$.

Définition 2.2 *Une cmf M est* faiblement interne *si pour tout $y \in M$, et tout diagramme $x_\bullet : I \longrightarrow M$, le morphisme naturel*

$$Hocolim_{i\in I}(x_i \times^h y) \longrightarrow (Hocolim_{i\in I} x_i) \times^h y$$

est un isomorphisme dans $Ho(M)$.

Bien entendu, une cmf interne est faiblement interne. La réciproque n'est pas vrai, mais nous avons tout de même la proposition suivante.

Proposition 2.3

1. *Toute cmf Quillen-équivalente à une cmf interne est faiblement interne.*

2. *Soit M une cmf combinatoire au sens de [Du]. Alors, M est faiblement interne si et seulement si elle est Quillen-équivalente à une cmf simpliciale, interne, et dans laquelle tous les objets sont cofibrants.*

Preuve: (1) Ceci est immédiat car les équivalences de Quillen préservent les limites et colimites homotopiques.

(2) Soit M une cmf combinatoire et faiblement interne. Il nous faut montrer qu'elle est Quillen-équivalente à une cmf interne, simpliciale, et dans laquelle tous les objets sont cofibrants. Tout d'abord, en appliquant [Du] on peut supposer que M est une cmf simpliciale dans laquelle tous les objets sont cofibrants. Nous noterons alors $\underline{Hom}$ les Hom simpliciaux de M.

Soit $C \subset M$ une sous catégorie pleine qui est petite et dont l'ensemble des objets est un ensemble de représentant pour les classes d'isomorphie d'objets λ-petits pour un cardinal régulier λ comme dans [Du, Def. 2.2]. Quitte à choisir λ assez grand, on peut supposer que C est stable par produits directs ainsi que par le foncteur de remplacement fibrant R. On note alors C^f la sous-catégorie pleine de C formée des objets fibrants. On considère alors le plongement de Yoneda simplicial restreint

$$\begin{array}{cccc} \underline{h}: & M & \longrightarrow & SPr(C^f) \\ & x & \mapsto & (\underline{h}_x := \underline{Hom}(-,x)) \,, \end{array}$$

où $SPr(C^f)$ est la cmf des préfaisceaux simpliciaux sur C^f (on utilise ici la structure projective pour laquelle les fibrations et équivalences sont définis niveaux par niveaux). Le foncteur $\underline{h}$ possède un adjoint à gauche

$$Re : SPr(C^f) \longrightarrow M$$

qui en fait un foncteur de Quillen à droite. Tout comme dans [HAGI, Thm. 4.2.3], on voit que le foncteur dérivé

$$\mathbb{R}\underline{h} : Ho(M) \longrightarrow Ho(SPr(C^f))$$

est pleinement fidèle. On sait donc par [Du, Prop. 3.2] qu'il existe un petit ensemble de morphismes S dans $SPr(C^f)$ tel que l'adjonction de Quillen $(Re, \underline{h})$ induise une équivalence de Quillen entre M est la localisée de Bousfield à gauche $L_S SPr(C^f)$. On peut donc supposer que $M = L_S SPr(C^f)$.

La catégorie $SPr(C^f)$ possède aussi une autre structure de cmf pour laquelle les cofibrations et les équivalences sont définis niveaux par niveaux, et en particulier pour laquelle tout objet est cofibrant. On note cette structure $SPr_{inj}(C^f)$, que l'on voit tout de suite être une cmf interne (car $SEns$ est interne). Le foncteur identité induit une équivalence de Quillen entre $L_S SPr(C^f)$ et $L_S SPr_{inj}(C^f)$ et nous sommes donc ramené à démontrer que $L_S SPr_{inj}(C^f)$ est une cmf interne.

Lemme 2.4 *Le foncteur de localisation*

$$Ho(SPr_{inj}(C^f)) \longrightarrow Ho(L_S SPr_{inj}(C^f))$$

commute aux produits directs finis.

Preuve du lemme: Par construction, le foncteur de localisation est équivalent au foncteur

$$\mathbb{L}Re : Ho(SPr(C^f)) \longrightarrow Ho(M).$$

De plus, on a $\mathbb{L}Re(h_x) \simeq x$, et donc

$$\mathbb{L}Re(h_x \times h_y) \simeq \mathbb{L}Re(h_x) \times^h \mathbb{L}Re(h_y),$$

pour tout $x, y \in C^f$. Tout objet $F \in Ho(SPr(C^f))$ peut s'écrire comme une colimite homotopique d'objets de la forme h_x pour $x \in C^f$. On a donc, pour tout $y \in C^f$

$$\mathbb{L}Re(F \times h_y) \simeq \mathbb{L}Re(Hocolim_{i\in I} h_{x_i} \times h_y) \simeq Hocolim_{i\in I}\left(\mathbb{L}Re(h_{x_i} \times h_y)\right) \simeq Hocolim_{i\in I}(x_i \times y))$$

$$\simeq (Hocolim_{i\in I} x_i) \times^h y \simeq \mathbb{L}Re(Hocolim_{i\in I} h_{x_i}) \times^h \mathbb{L}Re(F)(h_y) \simeq \mathbb{L}Re(F) \times^h \mathbb{L}Re(F)(h_y).$$

Finallement, pour deux objets F et G de $Ho(SPr(C^f))$, on écrit $G \simeq Hocolim_j h_{y_j}$, et on trouve

$$\mathbb{L}Re(F \times G) \simeq Hocolim_j(\mathbb{L}Re(F \times h_{y_j})) \simeq Hocolim_j(\mathbb{L}Re(F) \times^h y_j)$$

$$\simeq \mathbb{L}Re(F) \times^h (Hocolim_j \mathbb{L}Re(h_{y_j})) \simeq \mathbb{L}Re(F) \times^h \mathbb{L}Re(G).$$

$\Box$

Nous pouvons maintenant terminer la preuve de la proposition. Nous savons que $SPr_{inj}(C^f)$ est une cmf interne et que le foncteur de localisation preserve les produits directs (homotopiques). On déduit alors de façon purement formelle que $L_S SPr_{inj}(C^f)$ est encore une cmf interne. $\Box$

On déduit de Prop. 2.3 le corollaire important suivant.

Corollaire 2.5 *Soit M une cmf combinatoire et faiblement interne. La catégorie $Ho(M)$ est cartésiennement close, et ce de façon compatible avec le $Ho(SEns)$-enrichissement.*

Pour tout cmf combinatoire et faiblement interne M, nous noterons $\mathbb{R}\underline{Hom}_M$ les Hom internes de la catégorie homotopique $Ho(M)$. Ceci est bien entendu un abus de notation, car $\mathbb{R}\underline{Hom}_M$ n'est pas obtenu comme foncteur dérivé d'un foncteur $\underline{Hom}_M$ défini sur M elle même.

Il est à noter que le corollaire 2.5 peut être rafiné de la façon suivante. Soit I une petite catégorie, et soit $Y \in Ho(M^I)$ et $X \in Ho(M)$. Alors, on peut définir un objet $\mathbb{R}\underline{Hom}_M(X, Y) \in Ho(M^I)$, fonctoriellement en X et Y, de sorte à avoir des isomorphismes naturels dans $Ho(SEns)$

$$Map_{M^I}(Z \times^h X, Y) \longrightarrow Map_{M^I}(Z, \mathbb{R}\underline{Hom}_M(X, Y)),$$

pour tout $Z \in Ho(M^I)$. De même, on peut pour $X \in Ho(M^I)$ et $Y \in Ho(M)$ définir un objet $\mathbb{R}\underline{Hom}_M(X,Y) \in Ho(M^{(I^{op})})$, fonctoriellement en X et Y, et de sorte à avoir des isomorphismes naturels dans $Ho(SEns)$

$$Map_{M^{(I^{op})}}(Z, \mathbb{R}\underline{Hom}_M(X,Y)) \simeq Hoend\left((i,j) \mapsto Map_M(Z_i \times^h X_j, Y)\right).$$

Par la suite, nous utiliserons implicitement ces extensions functorielles des Hom internes de $Ho(M)$.

3 Intervalles

Dans ce paragraphe on se fixe une cmf combinatoire et faiblement interne M.

Pour un entier $n \geq 1$ et pour $0 \geq i < n$, on dispose dans Δ de morphismes

$$se_i : [1] \longrightarrow [n]$$

donnés en envoyant 0 sur i et 1 sur $i+1$. Ces morphismes vérifient $se_i(1) = se_{i+1}(0)$, et induisent un isomorphisme dans Δ

$$\underbrace{[1] \coprod_{[0]} [1] \ldots [1] \coprod_{[0]} [1]}_{n\ fois} \simeq [n].$$

Ainsi, pour tout objet co-simplicial $C : \Delta \longrightarrow M$, et tout entier $n \geq 1$ on dispose d'un morphism naturel dans M

$$C(1) \coprod_{C(0)} C(1) \ldots C(1) \coprod_{C(0)} C(1) \longrightarrow C(n),$$

et donc d'un morphisme naturel dans $Ho(M)$

$$\underbrace{C(1) \coprod_{C(0)}^{\mathbb{L}} C(1) \ldots C(1) \coprod_{C(0)}^{\mathbb{L}} C(1)}_{n\ fois} \longrightarrow C(n).$$

Définition 3.1 *Un objet co-simplicial*

$$C : \Delta \longrightarrow M$$

est une co-catégorie faible *si pour tout $n > 0$ le morphisme*

$$C(1) \coprod_{C(0)}^{\mathbb{L}} C(1) \ldots C(1) \coprod_{C(0)}^{\mathbb{L}} C(1) \longrightarrow C(n)$$

est un isomorphisme dans $Ho(M)$.

On se fixe pour la suite de ce paragraphe une co-catégorie faible

$$C : \Delta \longrightarrow M.$$

On considère les cmf csM des objets co-simpliciaux dans M, et sM des objets simpliciaux dans M (pour la structure de Reedy par exemple, voir [Ho, §5.2]). Soit $X_* \in sM$ un objet simplicial dans M. En utilisant la proposition 2.3 on voit que l'on peut construire un foncteur bien défini

$$\mathbb{R}\underline{Hom}_M(C, -) : Ho(M) \longrightarrow Ho(sM).$$

Proposition 3.2 *Avec les notations précédentes, le foncteur $Ho(SEns)$-enrichi*

$$\begin{array}{cccc} |X_*|_C : & Ho(M)^{op} & \longrightarrow & Ho(SEns) \\ & Y & \mapsto & Map_{sM}(X_*, \mathbb{R}\underline{Hom}_M(C, Y)) \end{array}$$

est représentable par un objet $|X_*|_C \in Ho(M)$.

Preuve: À l'aide de la proposition 2.3 on voit que l'on peut supposer que M est une cmf simplicial et interne. On peut aussi supposer que C est cofibrant dans csM et que X_* est cofibrant dans sM (pour les structures de Reedy). Dans ce cas, on voit facilement que le co-égaliseur des deux morphismes naturels

$$\coprod_{[m]\rightarrow[p]} C(m) \times X_p \rightrightarrows \coprod_{[n]} C(n) \times X_n,$$

représente le foncteur en question. $\square$

Définition 3.3 *Pour un objet $X_* \in Ho(sM)$, l'objet $|X_*|_C \in Ho(M)$ sera appelé la* C-réalisation géométrique de X_*.

Bien entendu la construction $X_* \mapsto |X_*|_C$ est fonctorielle en X_* et définit un foncteur

$$| - |_C : Ho(sM) \longrightarrow Ho(M).$$

Soit $\widetilde{*}$ un modèle cofibrant pour l'objet final de M. On définit le foncteur

$$Ens \longrightarrow M$$

qui envoit un ensemble E sur $\coprod_E \widetilde{*}$. Ce foncteur s'étend naturellement aux objets simpliciaux

$$\phi : SEns \longrightarrow sM.$$

Soit maintenant A une petite catégorie, et $N(A) \in SEns$ sont nerf. Par ϕ on en déduit un objet $\phi(N(A)) \in Ho(sM)$. On pose alors

$$\overline{\Delta(1)} := \phi(N(\overline{I})) \in Ho(sM),$$

où $\overline{I}$ est la catégorie avec deux objets et un unique isomorphisme entre eux.

Définition 3.4 *Une co-catégorie faible C dans M est un* intervalle *si les deux propriétés suivantes sont vérifiées.*

1. *Le morphisme $C(0) \longrightarrow *$ est une équivalence dans M.*
2. *Le morphisme $|\overline{\Delta(1)}|_C \longrightarrow *$ est une équivalence dans M.*

Supposons maintenant que C soit un intervalle au sens ci-dessus. Pour un diagrame

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d] \\ Y \arrow[r] & Z \end{tikzcd}$$

dans M, on définit un objet $X \times^C_Z Y \in Ho(M)$ par la formule

$$X \times^C_Z Y := (X \times^h Y) \times^h_{Z \times^h Z} \mathbb{R}\underline{Hom}_M(C(1), Z).$$

Dans cette formule, le morphisme

$$\mathbb{R}\underline{Hom}_M(C(1), Z) \longrightarrow Z \times^h Z$$

est induit par le morphisme naturel

$$* \coprod^{\mathbb{L}} * \simeq C(0) \coprod^{\mathbb{L}} C(0) \longrightarrow C(1).$$

Définition 3.5 *L'objet $X \times^C_Z Y \in Ho(M)$ est appelé le C-*produit fibré homotopique de X et Y au-dessus de Z*.*

On passera sous silence les propriétés de fonctorialité du C-produit fibré homotopique, qui sont évidentes.

Pour terminer ce paragraphe, supposons maintenant que $p : X \longrightarrow Y$ soit un morphisme dans M. Nous allons définir un objet simplicial $N^C(p) \in Ho(sM)$, appelé le C-nerf homotopique de p, et tel que

$$N^C(p)_n \simeq \underbrace{X \times^C_Y X \times^C_Y \cdots \times^C_Y X}_{n\ fois}.$$

Soit $Z_* \in Ho(sM)$, et considérons $|Z_*|_C$. On dipose d'un morphisme naturel $Z_0 \times^h C(0) \longrightarrow |Z_*|_C$ dans $Ho(M)$, qui comme C est un intervalle induit un morphisme naturel

$$Z_0 \longrightarrow |Z_*|_C.$$

On peut donc considérer l'ensemble simplicial

$$Map_M(Z_0, X) \times^h_{Map_M(Z_0,Y)} Map_M(|Z_*|_C, Y).$$

Ceci définit un foncteur $Ho(SEns)$-enrichi

$$Z \mapsto Map_M(Z_0, X) \times^h_{Map_M(Z_0,Y)} Map_M(|Z_*|_C, Y)$$

de $Ho(sM)^{op}$ vers $Ho(SEns)$.

Proposition 3.6 *Le foncteur ci-dessus est représentable (au sens enrichi) par un objet $N^C(p) \in Ho(sM)$.*

Preuve: On peut à l'aide de la proposition 2.3 supposer que M est une cmf interne. De plus, on peut supposer que C est un objet cofibrant dans csM et que le morphisme p est une fibration entre objets fibrants de M. On pose alors

$$N^C(p)_n := \underline{Hom}_M(C(0), X)^n \times_{\underline{Hom}_M(C(0),Y)^n} \underline{Hom}_M(C(n), Y),$$

où le morphisme $\underline{Hom}_M(C(n), Y) \longrightarrow \underline{Hom}_M(C(0), Y)^n$ est induit par les n-morphismes naturels $C(0) \longrightarrow C(n)$. Ceci définit l'objet $N^C(p) \in Ho(sM)$, et l'on remarque immédiatement qu'il possède la propriété universelle requise. $\Box$

Définition 3.7 *L'objet $N^C(p) \in Ho(sM)$ est appelé le C*-nerf du morphisme *p.*

Soit $Z_* \in Ho(sM)$ un objet simplicial. Alors il existe un morphisme naturel dans $Ho(sM)$

$$Z_* \longrightarrow N^C(p)$$

où $p : Z_0 \longrightarrow |Z_*|_C$ est le morphisme naturel. Ceci se voit à l'aide de la propriété universelle du C-nerf.

4 Théorie de $(1, \infty)$-catégories

Supposons que M soit une cmf faiblement interne, combinatoire, et $C \in Ho(csM)$ soit un intervalle. Nous aurons besoin des deux notions suivantes.

Définition 4.1 *1.* Une catégorie faible dans M *est un objet simplicial $X_* \in sM$ tel que pour tout $n \geq 1$ le morphisme naturel*

$$X_n \longrightarrow X_1 \times^h_{X_0} X_1 \cdots \times^h_{X_0} X_1$$

soit un isomorphisme dans $Ho(M)$ (en d'autres termes c'est une cocatégorie faible dans M^{op}).

2. Un objet $X \in M$ est 0-local *si le morphisme*

$$Map_M(*, X) \longrightarrow Map_M(C(1), X)$$

est un isomorphisme dans $Ho(SEns)$.

La définition fondamentale de ce travail est la suivante.

Définition 4.2 *Une cmf M munie d'un objet $C \in Ho(csM)$ est* une théorie de $(1, \infty)$-catégories *si les conditions suivantes sont vérifiées.*

A1 Pour tout objet fibrant et 0-local X, la cmf M/X est faiblement interne et combinatoire.

A2 L'objet C est un intervalle dans M.

A3 Pour toute famille d'objets $\{X_i\}$ dans $Ho(M)$, de somme $X = \coprod^{\mathbb{L}} X_i \in Ho(M)$, et pour tout morphisme $Z \longrightarrow X$ dans $Ho(M)$, les morphismes naturels

$$X_i \longrightarrow X_i \times^h_X X_i \qquad \coprod^{\mathbb{L}} Z \times^h_X X_i \longrightarrow Z$$

sont des isomorphismes dans $Ho(M)$ (pour tout indice i).

A4 Soit $Z_* \in Ho(sM)$ une catégorie faible, muni d'un morphisme $|Z_*|_C \longrightarrow Y$ dans $Ho(M)$, et $p : X \longrightarrow Y$ un morphisme dans M, tel que X, Z_0 et Z_1 soient 0-locaux dans M. Alors, le morphisme naturel

$$|Z_* \times^h_{\mathbb{R}\underline{Hom}_M(C,Y)} X|_C \longrightarrow |Z_*|_C \times^h_Y X$$

est un isomorphisme dans $Ho(M)$.

A5 Pour toute catégorie faible $X_* \in Ho(sM)$, telle que les objets X_0 et X_1 soient 0-locaux dans M, le morphisme naturel

$$X_* \longrightarrow N^C(X_0 \to |X_*|_C)$$

est un isomorphisme dans $Ho(sM)$.

A6 Un morphisme $f : X \longrightarrow Y$ dans M est une équivalence si et seulement si les deux morphismes

$$Map_M(*, X) \longrightarrow Map_M(*, Y) \qquad Map_M(C(1), X) \longrightarrow Map_M(C(1), Y)$$

sont des isomorphismes dans $Ho(SEns)$.

A7 Pour tout $[n]$ et $[m]$ dans Δ le morphisme

$$Hom_{\Delta}([n],[m]) \longrightarrow Map_M(C(n),C(m))$$

est un isomorphisme dans $Ho(SEns)$.

Le lecteur remarquera l'analogie entre les axiomes $A1-A5$ et les axiomes de Giraud caractérisant les topoi ainsi que leur généralisations aux topoi de modèles de [HAGI] (seul $A2$ est vraiment nouveau ici). Les axiomes $A1$ et $A3$ nous disent essentiellement que les colimites homotopiques sont stables par produits fibrés homotopiques (du moins au-dessus d'objets 0-locaux), et que les sommes sont homotopiquement disjointes. Les axiomes $A4$ et $A5$ affirment quand à eux que les relations d'équivalences *catégoriques* sont effectives et universelles en un certains sens, la nouveauté ici étant bien de passer de la notion de relation d'équivalences définie par des actions de groupoides à son analogue définie par des actions de catégories. La condition $A6$ nous dit que $*$ et $C(1)$ sont générateurs, tout comme on peut caractériser la catégorie des ensembles comme le seul topos de Grothendieck tel que $*$ soit non vide et générateur (ici la condition $A7$ sur l'intervalle C implique automatiquement que $*$ et $C(1)$ sont non vides). La condition $A7$ est une façon d'exprimer que l'intervalle est non dégénéré, et en particulier non contractile. Signalons enfin que du point de vue intuitif $C(1)$ est la catégorie avec deux objets et un unique morphisme entre eux, et que de ce fait les objets 0-locaux correspondent aux ∞-catégories qui sont des ∞-groupoides.

Il est important de remarquer qu'il existe au moins une théorie de $(1,\infty)$-catégories. La plus évidente est la théorie homotopique des théories homotopiques de C. Rezk, décrite dans [Re], que nous allons briévement rappeler.

Notons $sSEns$ la catégorie des objets simpliciaux dans $SEns$, que l'on muni de sa structure de Reedy. Pour cette structure les cofibrations et les équivalences faibles sont définis niveaux par niveaux. Pour éviter des confusions les objets de $sSEns$ seront toujours pensés comme des foncteurs

$$\begin{array}{cccc} X_*: & \Delta^{op} & \longrightarrow & SEns \\ & [n] & \mapsto & X_n, \end{array}$$

et non comme des ensembles bi-simpliciaux. On notera $h(n) \in sSEns$ l'objet représenté par $[n] \in \Delta$, caratérisé par l'isomorphisme d'adjonction

$$Hom(h(n),X_*) \simeq (X_n)_0.$$

Dans $sSEns$, on dispose alors des morphismes de Segal

$$\phi_n : h(1)\coprod_{h(0)} h(1)\dots h(1)\coprod_{h(0)} h(1) \longrightarrow h(n),$$

pour tout $n \geq 2$. On dipose aussi du nerf $N(\overline{I})$, qui est un ensemble simplicial et vu comme objet de $sSEns$ constant en la deuxième coordonée ($\overline{I}$ désigne toujours la catégorie avec deux objets et un unique isomorphisme entre eux). La cmf CSS est par définition la localisée de Bousfield à gauche de $sSEns$ le long des morphismes $N(\overline{I}) \rightarrow *$ et ϕ_n pour $n \geq 2$. Nous renvoyons à [Re] pour une description plus explicite et plus complète de la cmf de CSS. Nous rappellerons simplement la forme des objets fibrants. Un objet $X_* \in sSEns$ est fibrant dans CSS si c'est un espace de Segal complet qui est de plus Reedy fibrant. Cela signifie que X_* est fibrant pour la structure de Reedy sur $sSEns$, et de plus que les deux conditions suivantes sont satisfaites.

- L'objet X_* est un catégorie faible dans $SEns$ au sens de la définition 4.1. On définit alors une catégorie $[X_*]$ dont les objets sont les 0-simplexes de X_0, et dont l'ensemble de morphismes de x vers y est $\pi_0(Hom(x,y))$, où $Hom(x,y)$ est la fibre homotopique de $X_1 \longrightarrow X_0 \times X_0$ au point (x,y). La structure de catégorie faible sur X_* induit une structure naturelle de catégorie sur $[X_*]$.

- On note $X_{hoequiv}$ le sous-ensemble simplicial de X_1 formé de toutes les composantes connexes $x \in \pi_0(X_1)$ correspondant à des isomorphismes dans la catégorie $[X_*]$. Alors le morphisme
$$X_0 \longrightarrow X_1$$
se factorise par
$$X_0 \longrightarrow X_{hoequiv}$$
et on demande que ce morphisme soit une équivalence dans $SEns$.

La première des deux conditions précédente correspond à la localité pour rapport aux morphismes ϕ_n pour $n > 1$, et la seconde à la localité par rapport au morphisme $N(\overline{I}) \longrightarrow *$. De plus, lorsque X est une catégorie faible dans $SEns$, il est important de rappeler que le morphisme naturel
$$Map_{sSEns}(N(\overline{I}), X_*) \longrightarrow X_1$$
induit une équivalence entre $Map_{sSEns}(N(\overline{I}), X_*)$ est $X_{hoequiv}$. Nous utiliserons ceci à plusieurs reprises par la suite.

La cmf CSS dispose d'un intervalle naturel
$$C : \Delta \longrightarrow CSS$$
défini simplement par $C(n) = h(n)$. Le fait que C soit un intervalle provient précisemment du procédé de localisation passant de $sSEns$ à CSS (noter que C n'est pas un intervalle dans $sSEns$). Noter que pour cette théorie, les objets 0-locaux sont précisement les objets simpliciaux $\Delta^{op} \longrightarrow SEns$ homotopiquement constants.

On peut alors vérifier que la cmf CSS munie de son intervalle C vérifient les axiomes de notre définition 4.2, et forment donc une théorie de $(1,\infty)$-catégories. Nous ne le ferons pas ici, et laissons le soin au lecteur de vérifier les axiomes $A1 - A7$, qui ne présentent pas de grosses difficultés et se déduisent aisémment des résultats de [Re].

5 Théorème d'unicité

Notre théorème principal est le suivant.

Théorèm 5.1 *Soit (M,C) une théorie de $(1,\infty)$-catégories. Alors, M est Quillen équivalente à CSS.*

Preuve: Par la proposition 2.3 on peut supposer que M est combinatoire, simpliciale et que tous ces objets sont cofibrants. On supposera aussi que $C \in csM$ est cofibrant pour la structure de Reedy. Nous noterons $\underline{Hom}$ les Hom simpliciaux de M, $\underline{Hom}_M$ ses Hom internes, et $X \otimes Z \in M$ le produit tensoriel externe d'un ensemble simplicial X par un objet Z de M. On définit le foncteur S par la formule

$$\begin{array}{cccc} S(X): & \Delta^{op} & \longrightarrow & SEns \\ & [n] & \mapsto & \underline{Hom}(C(n),X). \end{array}$$

Ce foncteur possède clairement un adjoint à gauche R, qui envoit un objet $X_* \in CSS$ sur le co-égaliseur dans M des deux morphismes naturels

$$\coprod_{[m]\to[p]} X_p \otimes C(m) \rightrightarrows \coprod_{[n]\in\Delta} X_n \otimes C(n).$$

Comme C est supposé cofibrant dans csM, on voit facilement que l'adjonction (R,S) est une adjonction de Quillen pour la structure de Reedy sur $sSEns$. Notons que $R(N(\overline{I}))$ est isomorphe dans M à $|\overline{\Delta(1)}|_C$. De même, l'image par R du morphisme

$$\phi_n : h(1)\coprod_{h(0)} h(1)\dots h(1)\coprod_{h(0)} h(1) \longrightarrow h(n),$$

est isomorphe au morphisme

$$C(1)\coprod_{C(0)} C(1)\dots C(1)\coprod_{C(0)} C(1) \longrightarrow C(n).$$

Ainsi, comme C est un intervalle et par propriété universelle des localisation de Bousfield, l'adjonction de Quillen (R,S) est aussi une adjonction de Quillen après localisation de $sSEns$ à CSS. Comme tout objet de CSS et de M est cofibrant on a clairement $\mathbb{L}R \simeq R$.

Nous allons montrer que (R,S) est une équivalence de Quillen. Pour cela, notons que l'axiome $A6$ implique que le foncteur

$$\mathbb{R}S : Ho(M) \longrightarrow Ho(CSS)$$

est conservatif. Il nous suffit donc de montrer que pour tout $X_* \in CSS$, le morphisme d'adjonction $X_* \longrightarrow \mathbb{R}S \circ R(X_*)$ est un isomorphisme dans $Ho(CSS)$.

Rappelons qu'un morphisme $f : X \longrightarrow Y$ dans une cmf N est un monomorphisme homotopique (ou simplement *h-mono*) si le morphisme diagonal

$$X \longrightarrow X \times_Y^h X$$

est un isomorphisme dans $Ho(N)$. De manière équivalente, f est un h-mono si et seulement si pour tout objet Z dans N le morphisme

$$Map_N(Z, X) \longrightarrow Map_N(Z, Y)$$

est injectif sur les π_0 et bijectif sur tous les π_i (i.e. est équivalent à une inclusion de composantes connexes).

Lemme 5.2 *Pour tout $X \in M$, le morphisme*

$$\mathbb{R}\underline{Hom}_M(*, X) \longrightarrow \mathbb{R}\underline{Hom}_M(C(1), X)$$

est un h-mono.

Preuve du lemme 5.2: Par la propriété d'adjonction des Hom internes il suffit de montrer que pour tout $X \in M$ le morphisme

$$Map_M(*, X) \longrightarrow Map_M(C(1), X)$$

est un h-mono dans $SEns$. Mais par définition, ce morphisme est équivalent au morphisme de dégénérescence

$$\mathbb{R}S(X_*)_0 \longrightarrow \mathbb{R}S(X_*)_1.$$

Comme $\mathbb{R}S(X_*)$ est un objet fibrant de CSS, c'est un espace de Segal complet, et donc ce dernier morphisme est un h-mono par définition (cf [Re, §6]). $\Box$

Lemme 5.3 *Soit $X \in M$, et notons $\emptyset_M \in M$ l'objet initial de M. S'il existe un morphisme $X \longrightarrow \emptyset_M$ dans $Ho(M)$, alors c'est un isomorphisme. De plus, les objets $*$ et $\emptyset_M$ ne sont pas isomorphes dans $Ho(M)$.*

Preuve du lemme 5.3: Commençons par montrer que

$$Map_M(*, \emptyset_M) = Map_M(C(1), \emptyset_M) = \emptyset \in Ho(SSet),$$

où $\emptyset$ désigne l'objet initial de $SSet$. Comme il existe un morphisme $* \longrightarrow C(1)$ dans $Ho(M)$, on voit qu'il suffit de montrer que $Map_M(*, \emptyset_M) = \emptyset$. Pour cela, on commence par utiliser l'axiome $A1$ qui implique que $X \times^h \emptyset_M \simeq \emptyset_M$ pour tout objet $X \in M$. En prenant $X = C(1)$ on trouve que la projection

$$Map_M(*, \emptyset_M) \times Map_M(*, C(1)) \longrightarrow Map_M(*, \emptyset_M)$$

est un isomorphisme dans $Ho(SEns)$. Enfin, l'axiome $A7$ implique que $\pi_0(Map_M(*, C(1))) = * \coprod *$, ce qui implique que $Map_M(*, \emptyset_M) = \emptyset$.

Supposons maintenant que $X \longrightarrow \emptyset_M$ soit un morphisme dans $Ho(M)$. On vient de voir que l'on doit avoir

$$Map_M(*, X) \simeq Map_M(C(1), X) \simeq Map_M(*, \emptyset_M) \simeq Map_M(C(1), \emptyset_M) \simeq \emptyset.$$

L'axiome $A6$ implique donc que $X \longrightarrow \emptyset_M$ est un isomorphisme dans $Ho(M)$.

Finalement, le fait que $*$ et $\emptyset_M$ ne soient pas isomorphes dans $Ho(M)$ se déduit immédiatement de l'axiome $A7$. $\square$

Lemme 5.4 *Soit $X_* \in Ho(sM)$ une catégorie faible avec X_0 et X_1 des objets 0-locaux dans M. Alors, le morphisme naturel $X_0 \longrightarrow |X_*|_C$ induit une surjection*

$$[*, X_0] \longrightarrow [*, |X_*|_C].$$

Preuve du lemme 5.4: Soit $* \longrightarrow |X_*|_C$ un morphisme dans $Ho(M)$. On applique l'axiome $A4$ au diagrame

$$\begin{tikzcd} & {|X_*|_C} \arrow[d, "id"] \\ \bullet \arrow[r] & {|X_*|_C}, \end{tikzcd}$$

qui nous donne un isomorphisme $|Y_*|_C \simeq *$ dans $Ho(M)$, où Y_* est la catégorie faible définie par

$$Y_* := X_* \times^h_{\mathbb{R}\underline{Hom}_M(C, |X_*|_C)} *.$$

On a en particulier $Y_0 \simeq X_0 \times^h_{|X_*|_C} *$.

Supposons que $[*, Y_0] = \emptyset$. Comme C est un intervalle, on a $[*, C(1)] \neq \emptyset$, et donc $[C(1), Y_0] = \emptyset$. Ainsi, par l'axiome $A6$ et le lemme 5.3 on en déduit que $Y_0 \simeq \emptyset_M$. Le lemme 5.3 implique aussi que $Y_i \simeq \emptyset_M$ pour tout i, et donc que $|Y_*|_C \simeq * \simeq \emptyset$. Ceci est contradictoire avec le lemme 5.3, et ainsi on a $[*, Y_0] \neq \emptyset$. Comme la carré suivant

$$\begin{tikzcd} Y_0 \arrow[r] \arrow[d] & X_0 \arrow[d] \\ \bullet \arrow[r] & {|X_*|_C} \end{tikzcd}$$

est homotopiquement cartésien, on en déduit que le morphisme $* \longrightarrow |X_*|_C$ se factorise dans $Ho(M)$ par $X_0 \longrightarrow |X_*|_C$, ce qu'il fallait démontrer. $\square$

Lemme 5.5 *Soient X_* et Y_* deux catégories faibles dans M telles que les deux conditions suivantes soient satisfaites.*

1. *L'objet X_0 est isomorphe dans $Ho(M)$ à un objet de la forme $\coprod_E^{\mathbb{L}} *$, où E est un ensemble.*

2. *Les objets Y_0 et Y_1 sont 0-locaux.*

Alors, le morphisme naturel

$$[X_*, Y_*]_{sM} \longrightarrow [|X_*|_C, |Y_*|_C]_M$$

est surjectif.

Preuve du lemme 5.5: Soit $|X_*|_C \longrightarrow |Y_*|_C$ un morphisme dans $Ho(M)$, et considérons le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[d] & Y_0 \arrow[d] \\ |X_*|_C \arrow[r] & |Y_*|_C. \end{tikzcd}$$

Le morphisme $X_0 \longrightarrow |Y_*|_C$ est donné par une application $E \longrightarrow [*, |Y_*|_C]$. Ainsi, d'après le lemme 5.4, il existe un morphisme $X_0 \longrightarrow Y_0$ et un diagramme homotopiquement commutatif

$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[r] \arrow[d] & Y_0 \arrow[d] \\ |X_*|_C \arrow[r] & |Y_*|_C. \end{tikzcd}$$

En passant aux C-nerfs, et en appliquant l'axiome $A5$ pour Y_* on trouve un diagrame dans $Ho(sM)$

$$\begin{tikzcd} X_* \arrow[r] \arrow[dr] & N^C(X_0 \to |X_*|_C) \arrow[r] \arrow[d] & Y_* \arrow[d] \\ & |X_*|_C \arrow[r] & |Y_*|_C. \end{tikzcd}$$

Ceci implique que le morphisme $X_* \longrightarrow Y_*$ induit par passage aux C-réalisations géométriques le morphisme original $|X_*|_C \to |Y_*|_C$. $\square$

Lemme 5.6 *Soit L_0M la cmf localisée de Bousfield à gauche de M le long du morphisme $C(1) \longrightarrow *$. Alors, L_0M est un topos de modèles au sens de [HAGI, Def. 3.8.1].*

Preuve du lemme 5.6: On utilise le théorème de Giraud pour les topos de modèles [HAGI, Thm. 4.9.2].

Sous-lemme 5.7 *Soit X_* un groupoide de Segal dans M (au sens de [HAGI, Def. 4.9.1]). Alors, le morphisme naturel*

$$|X_*|_C \longrightarrow |X_*|$$

est un isomorphisme dans $Ho(M)$.

Preuve du sous-lemme 5.7: Soit $X_* \in sL_0M$ un groupoide de Segal. On le représente par une catégorie faible X_* dans M, tel que le morphisme

$$d_0 \times d_1 : X_2 \longrightarrow X_1 \times^h_{d_0,X_0,d_0} X_1$$

soit un isomorphisme dans $Ho(M)$. Notons $|X_*|$ la colimite homotopique de X_* dans M, et considérons le morphisme naturel $|X_*|_C \longrightarrow |X_*|$.

Soit $Z \in M$ un objet fibrant, et considérons le morphisme induit par q

$$q^* : Map_M(|X_*|, Z) \longrightarrow Map_M(|X_*|_C, Z).$$

Il est isomorphe au morphisme naturel (ici Z sera considéré comme un objet simplicial constant)

$$Map_{sM}(X_*, Z) \longrightarrow Map_{sM}(X_*, Z^C),$$

que l'on sait être un h-mono par le lemme 5.2. Pour voir que ce morphisme est un isomorphisme dans $Ho(SEns)$, on peut appliquer le lemme de Yoneda pour la cmf sM (voir [HAGI, §4.2]), et voir qu'il suffit de montrer que pour morphisme $u : X_* \longrightarrow Z^C$ dans $Ho(sM)$, et tout $Y \in M$, le morphisme induit par u

$$Map_M(Y, X_*) \longrightarrow Map_M(Y, Z^C)$$

se factorise dans $Ho(sSEns)$ par le h-mono

$$Map_M(Y, Z) \longrightarrow Map_M(Y, Z^C).$$

Mais, comme X_* est un groupoide de Segal, $Map_M(Y, X_*)$ est un groupoide de Segal dans $SEns$. De plus, $Map_M(Y, Z^C)$ est un espace de Segal complet au sens de [Re]. Ainsi, $Map_M(Y, X_*) \longrightarrow Map_M(Y, Z^C)$ se factorise par le sous-espace de Segal complet des équivalences dans $Map_M(Y, Z^C)$, qui n'est autre que l'image de $Map_M(Y, Z) \longrightarrow Map_M(Y, Z^C)$. Ceci finit de montrer que le morphisme $q : |X_*|_C \longrightarrow |X_*|$ est un isomorphisme dans $Ho(M)$. $\square$

Sous-lemme 5.8 *Pour tout groupoide de Segal X_* dans M, tel que X_0 et X_1 soient 0-locaux, l'objet $|X_*|_C$ est 0-local.*

Preuve du sous-lemme 5.8: Soit $f : C(1) \longrightarrow |X_*|_C$ un morphisme dans $Ho(M)$. En utilisant le lemme 5.5, on peut représenter ce morphisme comme la C-réalisation géométrique d'un morphisme dans $Ho(sM)$

$$\Delta(1) \longrightarrow X_*,$$

où $\Delta(1)$ est l'objet simplicial de M représenté par [1]. Ce morphisme est aussi donné par un morphisme dans $Ho(sSEns)$

$$h(1) \longrightarrow Map_M(*, X_*).$$

Mais comme X_* est un groupoide de Segal, $Map_M(*, X_*)$ est un groupoide de Segal dans $SEns$, et on a donc $Map_M(*, X_*)_{hoequiv} = Map_M(*, X_*)$. Ainsi, le théorème [Re, Thm 6.2] implique que le morphisme précédent se factorise en un diagramme commutatif dans $Ho(sSEns)$

$$\begin{tikzcd} h(1) \arrow[r] \arrow[d] & Map_M(*, X_*) \\ N(\overline{I}). \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

On en déduit donc un diagramme commutatif dans $Ho(sM)$

$$\begin{tikzcd} \Delta(1) \arrow[r] \arrow[d] & X_* \\ \overline{\Delta(1)}, \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

et donc un diagramme commutatif dans $Ho(M)$

$$\begin{tikzcd} C(1) \arrow[r, "f"] \arrow[d] & |X_*|_C \\ |\overline{\Delta(1)}|_C. \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Comme C est un intervalle dans M on en déduit que le morphisme f se factorise par $*$, et donc par le lemme 5.2 que le morphisme

$$Map_M(*, |X_*|_C) \longrightarrow Map_M(C(1), |X_*|_C)$$

est un isomorphisme dans $Ho(SEns)$. Ceci implique que $|X_*|_C$ est 0-local. $\square$

Revenons à la preuve du lemme 5.6. L'axiome $A1$ nous dit que la cmf L_0M vérifie la condition 1 du théorème [HAGI, Thm. 4.9.2]. La condition 2 de [HAGI, Thm. 4.9.2] se

déduit de l'axiome A3. En effet, pour $\{X_i\}$ une famille d'objet dans $Ho(L_0M)$, de somme $X = \coprod X_i$, et j un indice fixé, le morphisme naturel

$$\coprod_i X_i \times^h_X X_j \longrightarrow X_j$$

est un isomorphisme. Comme le morphisme

$$X_j \times^h_X X_j \longrightarrow X_j$$

est aussi un isomorphisme par $A3$, on voit que pour tout $i \neq j$ on a

$$X_i \times^h_X X_j \simeq \emptyset_{L_0M}.$$

Ceci montre bien que $A3$ implique la condition 2 de [HAGI, Thm. 4.9.2].

Pour terminer la preuve du lemma 5.6, il ne nous reste donc qu'à démontrer que les relations d'équivalences de Segal sont homotopiquement effectives dans L_0M (au sens de [HAGI, Def. 4.9.1]). Soit X_* un groupoide de Segal dans L_0M avec X_0 et X_1 0-locaux. D'après les sous-lemmes 5.7 et 5.8, on sait que $|X_*|_C \simeq |X_*|$ est de plus que c'est un objet 0-local. Le morphisme naturel

$$X_0 \times^h_{|X_*|} X_0 \longrightarrow X_0 \times^C_{|X_*|_C} X_0$$

est donc un isomorphisme. L'axiome $A5$ implique alors que le morphisme

$$X_1 \longrightarrow X_0 \times^h_{|X_*|} X_0$$

est un isomorphisme dans $Ho(L_0M)$, et donc que la relation d'équivalence de Segal X_* est homotopiquement effective. $\square$

Lemme 5.9 *Soit N un topos de modèles. Suppons de plus que les trois propriétés suivantes soient satisfaites.*

1. *La cmf N est simpliciale et tous ses objets sont cofibrants.*
2. *Un morphisme $X \longrightarrow Y$ dans N est une équivalence faible si et seulement si le morphisme induit*
$$Map_N(*, X) \longrightarrow Map_N(*, Y)$$
est un isomorphisme dans $Ho(SEns)$.
3. *On a*
$$Map_N(*, \emptyset_N) = \emptyset.$$

Alors le foncteur de Quillen à droite

$$\underline{Hom}(*, -) : N \longrightarrow SEns$$

est une équivalence de Quillen.

Preuve du lemme 5.9: La condition 3 nous dit que le foncteur

$$\mathbb{R}\underline{Hom}(*, -) : Ho(N) \longrightarrow Ho(SEns)$$

est conservatif. Il nous reste donc à montrer que pour tout $X \in SEns$, le morphisme d'adjonction

$$X \longrightarrow Map_N(*, X \otimes *)$$

est un isomorphisme dans $Ho(SEns)$.

Tout d'abord, comme N est un topos de modèles, le foncteur $X \mapsto X \otimes *$ commute aux produits fibrés homotopiques. De plus, la sous-catégorie pleine T de $Ho(N)$, formée des objets 0-tronqués est un topos de Grothendieck dans lequel l'objet final est générateur et non vide. Le morphisme géométrique $Ens \longrightarrow T$ est donc une équivalence de catégorie. En d'autres termes, pour tout ensemble simplicial 0-tronqué X, le morphisme d'adjonction

$$X \longrightarrow Map_N(*, X \otimes *)$$

est un isomorphisme dans $Ho(SEns)$.

Soit maintenant $X \in Ho(SEns)$, que l'on présente de la forme $|Y_*|$ où Y_* est un groupoide de Segal dans $SEns$ avec de plus Y_0 0-tronqué. On considère le morphisme

$$Y_0 \otimes * \longrightarrow X \otimes * \simeq |Y_* \otimes *|,$$

et le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} Y_0 \arrow[r] \arrow[d] & Map_N(*, Y_0 \otimes *) \arrow[d] \\ X \arrow[r] & Map_N(*, X \otimes *). \end{tikzcd}$$

Le morphisme horizontal du haut est un isomorphisme (car $T = Ens$). De plus, le morphisme $Y_0 \otimes * \longrightarrow X \otimes *$ est localement surjectif, et comme $*$ ne possède pas de sous-objet non-trivial (par les conditions 2 et 3) on en déduit que le morphisme vertical de droite est surjectif à homotopie près. Ceci implique clairement que le morphisme induit

$$\pi_0(X) \longrightarrow \pi_0(Map_N(*, X \otimes *)) \simeq [*, X \otimes *]$$

est surjectif. Soit de plus x et y deux point de Y_0, tels que leurs images dans $[*, X \otimes *]$ soient égaux. Les deux morphismes $x, y : * \longrightarrow Y_0$ sont donc égalisés par $Y_0 \longrightarrow X \otimes *$, et ils définissent donc un morphisme dans $Ho(N)$

$$* \longrightarrow x \times^h_{X \otimes *} y \simeq (x \times^h_X y) \otimes *,$$

où nous avons noté symboliquement $x \times^h_X y$ l'ensemble simplicial défini par le diagramme homotopiquement cartésien suivant

$$\begin{tikzcd} x \times^h_X y \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[d, "y"] \\ \bullet \arrow[r, "x"'] & X. \end{tikzcd}$$

Ainsi, $[*, (x \times^h_X y) \otimes *] \neq \emptyset$, et d'après ce que l'on vient de voir ceci implique que $\pi_0(x \times^h_X y)$ est non vide, et donc que $x = y$ dans $\pi_0(X)$.

On a donc montré que pour tout $X \in Ho(SEns)$, le morphisme d'adjonction

$$\pi_0(X) \longrightarrow \pi_0(Map_N(*, X \otimes *))$$

est bijectif. Comme le foncteur $X \mapsto X \otimes *$ commute de plus aux limites homotopiques finies, ceci entraine aussi que le morphisme d'adjonction

$$X \longrightarrow Map_N(*, X \otimes *)$$

est un isomorphisme dans $Ho(SEns)$. $\square$

Un dernier lemme avant de revenir à la preuve du théorème 5.1.

Lemme 5.10 *Soit X un ensemble simplicial, alors $X \otimes *$ est un objet 0-local dans M.*

Preuve: On commence par supposer que X est connexe. On peut alors écrire, à équivalence près, $X = BG$, où G est un groupe simplicial. Dans ce cas, il existe un isomorphisme naturel dans $Ho(M)$

$$X \otimes * \simeq |BG_* \otimes *|,$$

où $BG_* \in sSEns$ est le classifiant de G défini comme d'habitude par $BG_n := G^n$. L'objet simplicial $BG_* \otimes * \in sM$ est un groupoide de Segal dans M, et donc par le sous-lemme 5.7 on a $|BG_* \otimes *|_C \simeq |BG_* \otimes *|$. De plus, $BG_0 \otimes * = *$ est un objet 0-local.

Sous-lemme 5.11 *L'objet $BG_1 \otimes * = G \otimes *$ est 0-local.*

Preuve du sous-lemme 5.11: On considère $\mathbb{R}S(BG_* \otimes *)$, qui est un groupoide de Segal dans CSS, tel que $\mathbb{R}S(BG_* \otimes *)_n := \mathbb{R}S(BG_n \otimes *)$. En particulier, l'objet des objets de ce groupoide de Segal est $\mathbb{R}S(BG_0 \otimes *) \simeq *$. Ainsi, la catégorie homotopique $[\mathbb{R}S(BG_* \otimes *)_1] = [\mathbb{R}S(G \otimes *)]$ hérite d'une structure de groupoide de Segal dans Cat dont l'objet des objets est la catégorie ponctuelle $*$. Autrement dit, c'est une catégorie monoidale dont la structure monoidale est inversible (à isomorphisme près). Il est bien connu que cela implique que la catégorie $[\mathbb{R}S(G \otimes *)]$ est un groupoide, et donc que l'espace

de Segal complet $\mathbb{R}S(G \otimes *) \in CSS$ est homotopiquement constant. En d'autres termes l'objet $G \otimes *$ est 0-local dans M. $\Box$

Les sous-lemmes 5.7, 5.8 et 5.11 impliquent donc que l'objet $X \otimes * \simeq |BG_* \otimes *|_C$ est 0-local dans M, lorsque X est connexe.

Pour finir la preuve du lemme 5.10 il nous reste à traiter le cas général d'un ensemble simplicial $X \simeq \coprod X_\alpha$ avec X_α connexe. On a bien entendu

$$X \otimes * \simeq \coprod X_\alpha \otimes *,$$

et par ce que l'on vient de voir il nous suffit de démontrer le sous-lemme suivant.

Sous-lemme 5.12 *Soit $\{Y_i\}$ une famille d'objets 0-locaux dans M. Alors l'objet $Y := \coprod Y_i$ est 0-local.*

Preuve du sous-lemme 5.12: Soit $C(1) \longrightarrow Y$ un morphisme dans $Ho(M)$. Il nous suffit de montrer qu'il existe un indice j et un diagramme commutatif dans $Ho(M)$

$$\begin{tikzcd} C(1) \arrow[r] \arrow[dr] & Y \\ & Y_j. \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Par l'axiome $A3$ on a un isomorphisme dans $Ho(M)$

$$\coprod C(1) \times^h_Y Y_i \simeq C(1).$$

Cependant, en utilisant l'axiome $A7$ il est facile de voir que $C(1)$ est indécomposable, et donc qu'il existe un unique indice j tel que

$$C(1) \times^h_Y Y_j \simeq C(1).$$

En effet, supposons qu'il existe deux indices $i \neq j$, avec

$$C(1) \times^h_Y Y_i \neq \emptyset_M \qquad C(1) \times^h_Y Y_j \neq \emptyset_M.$$

Clairement, les deux morphismes distincts $* \longrightarrow C(1)$ (donnés par l'axiome $A7$) se factorisent l'un par $C(1) \times^h_Y Y_i$ et l'autre par $C(1) \times^h_Y Y_j$. On construirait alors un morphisme

$$C(1) \longrightarrow * \coprod *$$

qui envoit $C(1) \times^h_Y Y_i$ sur le premier point et $C(1) \times^h_Y Y_j$ sur le second. En composant avec l'automorphisme qui échange les deux points et par le morphisme naturel

$$* \coprod * \longrightarrow C(1),$$

on trouverait un morphisme $C(1) \longrightarrow C(1)$ qui ne soit égal à aucun des trois endomorphismes de $C(1)$ prévus par l'axiome $A7$. Il existe donc un unique indice j tel que

$$C(1) \times^h_Y Y_j \simeq C(1),$$

ce qui implique l'existence de la factorisation souhaitée. $\square$

On a ainsi terminé la preuve du lemme 5.10. $\square$

Nous revenons enfin à la preuve du théorème 5.1. Soit $X_* \in CSS$ qui soit constant égal à $X_0 \in SEns$. Alors le sous lemme 5.7 et le lemme 5.10 impliquent que

$$R(X_*) \simeq |X_* \otimes *|_C \simeq |X_* \otimes *| \simeq X_0 \otimes *$$

est un objet 0-local. Ainsi, les lemmes 5.6 et 5.9 impliquent que le morphisme d'adjonction

$$X_* \longrightarrow \mathbb{R}SR(X_* \otimes *) \simeq \mathbb{R}S(X_* \otimes *)$$

est un isomorphisme dans $Ho(CSS)$. La restriction du foncteur

$$R : Ho(CSS) \longrightarrow Ho(M)$$

à la sous-catégorie des objets homotopiquement constants est donc pleinement fidèle et son image consiste en tous les objets 0-locaux de $Ho(M)$. Par cette équivalence, on identifiera donc $Ho(SEns)$ avec la sous-catégorie pleine de $Ho(CSS)$ formée des objets homotopiquement constants, ainsi qu'avec la sous-catégorie pleine de $Ho(M)$ formée des objets 0-locaux. Pour éviter des confusions nous continuerons à noter $X \otimes *$ l'image de $X \in Ho(SEns)$ dans $Ho(M)$ par cette identification. Noter que l'on a

$$(X \times^h_Z Y) \otimes * \simeq (X \otimes *) \times^h_{(Z\otimes *)} (Y \otimes *).$$

Soit $X_* \in Ho(CSS)$, et considérons le morphisme naturel $X_0 \otimes * \longrightarrow R(X_*)$. Nous avons $R(X_*) \simeq |X_* \otimes *|_C$, et par le l'axiome $A5$, le morphisme naturel

$$X_1 \otimes * \longrightarrow (X_0 \otimes *) \times^C_{R(X_*)} (X_0 \otimes *)$$

est un isomorphisme dans $Ho(M)$. On dispose d'un diagramme commutatif dans $Ho(M)$

$$\begin{tikzcd}
X_0 \otimes * \arrow[r] \arrow[dr] & (X_0 \otimes *) \times^h_{R(X_*)} (X_0 \otimes *) \arrow[d, "a"] \\
& (X_0 \otimes *) \times^C_{R(X_*)} (X_0 \otimes *) \simeq X_1 \otimes *.
\end{tikzcd}$$

D'après le lemme 5.2 le morphisme a est un h-mono. De plus, comme X_* est un espace de Segal complet, le morphisme $X_0 \otimes * \longrightarrow X_1 \otimes *$ est aussi un h-mono. Ainsi, on en

déduit que $X_0 \otimes * \longrightarrow (X_0 \otimes *) \times^h_{R(X_*)} (X_0 \otimes *)$ est un h-mono. De plus, il est facile de voir que l'image de $(X_0 \otimes *) \times^h_{R(X_*)} (X_0 \otimes *)$ dans $X_1 \otimes *$ est contenue dans le sous-objet $X_{hoequiv} \otimes * \subset X_1 \otimes *$. Or, comme X_* est un espace de Segal complet, on sait que $X_{hoequiv} \otimes *$ est aussi l'image de $X_0 \otimes * \longrightarrow X_1 \otimes *$. Ceci implique que le morphisme

$$(X_0 \otimes *) \longrightarrow (X_0 \otimes *) \times^h_{R(X_*)} (X_0 \otimes *)$$

est un isomorphisme dans $Ho(M)$. En d'autres termes, le morphisme $X_0 \otimes * \longrightarrow R(X_*)$ est un h-mono dans M, et ainsi le morphisme

$$X_0 \longrightarrow \mathbb{R}S(R(X_*))_0 \simeq Map_M(*, R(X_*))$$

est un h-mono dans $SEns$. Comme le lemme 5.4 implique qu'il est surjectif à homotopie près, on voit que c'est un isomorphisme dans $Ho(SEns)$.

On considère maintenant le morphisme d'adjonction

$$X_* \longrightarrow \mathbb{R}SR(X_*).$$

C'est un morphisme entre espace de Segal complets, et l'on vient de voir que c'est un équivalence en degré 0. De plus, le morphisme induit en degré 1

$$X_1 \longrightarrow \mathbb{R}SR(X_*)_1$$

est isomorphe dans $Ho(SEns)$ au morphisme naturel

$$X_1 \simeq \mathbb{R}\underline{Hom}_{CSS}(h(1), X_*)_0 \longrightarrow \mathbb{R}\underline{Hom}_{CSS}(h(1), \mathbb{R}SR(X_*))_0 \simeq Map_M(*, \mathbb{R}\underline{Hom}_M(C(1), R(X_*))).$$

Or, en utilisant ce que l'on vient de démontrer

$$Map_M(*, R(X_*)) \simeq Map_M(*, X_0 \otimes *),$$

nous trouvons

$$Map_M(*, \mathbb{R}\underline{Hom}_M(C(1), R(X_*))) \simeq Map_M(*, R(X_*) \times^C_{R(X_*)} R(X_*))$$
$$\simeq (Map_M(*, R(X_*)) \times Map_M(*, R(X_*))) \times_{Map_M(*,R(X_*)) \times Map_M(*,R(X_*))} Map_M(*, \mathbb{R}\underline{Hom}_M(C(1), R(X_*)))$$
$$\simeq (Map_{SEns}(*, X_0) \times Map_{SEns}(*, X_0)) \times_{Map_M(*,R(X_*)) \times Map_M(*,R(X_*))} Map_M(*, \mathbb{R}\underline{Hom}_M(C(1), R(X_*)))$$
$$\simeq Map_M(*, (X_0 \otimes *) \times^C_{R(X_*)} (X_0 \otimes *)).$$

Ainsi, le morphisme

$$X_1 \longrightarrow \mathbb{R}SR(X_*)_1$$

est isomorphe dans $Ho(SEns)$ au morphisme naturel

$$Map_M(*, X_1 \otimes *) \longrightarrow Map_M(*, (X_0 \otimes *) \times^C_{R(X_*)} (X_0 \otimes *)),$$

qui est un isomorphisme dans $Ho(SEns)$ par l'axiome $A5$. Ceci finit de montrer que le morphisme d'adjonction $X_* \longrightarrow \mathbb{R}SR(X_*)$ est un isomorphisme dans $Ho(CSS)$, et donc termine la preuve du théorème 5.1. $\square$

6 Compléments sur l'unicité

Notre théorème 5.1 affirme que toute théorie de $(1,\infty)$-catégorie est équivalente à CSS. Dans ce paragraphe nous allons étudier l'unicité de l'équivalence entre CSS est une théorie de $(1,\infty)$-catégorie, ou en d'autres termes l'unicité des auto-équivalences de CSS. À ce niveau, la théorie des cmf n'est plus très bien adaptée car il est difficile de définir de façon pertinente la notion d'auto-équivalences d'une cmf. Ce que nous montrerons, c'est que la catégorie simpliciale $LCSS$, localisée à la Dwyer et Kan de CSS le long des équivalences, possèdent un monoide d'auto-équivalences équivalent à $\mathbb{Z}/2$.

Pour cela, on rappelle l'existence d'une cmf des S-catégories, démontrée dans [Be]. La localisée simpliciale $LCSS$ est donc un objet de la cmf $S-Cat$ (le lecteur méticuleux prendra garde de fixer des univers). On considére alors l'ensemble simplicial $Map_{S-Cat}(LCSS, LCSS)$, ainsi que $\mathbb{R}Aut(LCSS) \in Ho(SEns)$ le sous-ensemble simplicial de $Map_{S-Cat}(LCSS, LCSS)$ formée des équivalences. Le morphisme naturel $C : \Delta \longrightarrow LCSS$ permet de définir $\mathbb{R}Aut(\Delta/LCSS)$ comme la fibre homotopique de

$$C^* : \mathbb{R}Aut(LCSS) \longrightarrow Map_{S-Cat}(\Delta, LCSS)$$

prise en le morphisme C. La proposition suivant nous dit que l'objet $LCSS$ ne possède pas d'auto-équivalences préservant le morphisme $\Delta \longrightarrow LCSS$.

Proposition 6.1 *On a*

$$\mathbb{R}Aut(\Delta/LCSS) \simeq *.$$

Esquisse de preuve: Nous utiliserons l'analogue simplicial du théorème principal de [To, §7], dont nous commencerons par rapeler l'énoncé. Supposons que T et T' soient deux S-catégories. On forme les cmf $SPr(T)$ et $SPr(T')$ des préfaisceaux simpliciaux sur T et T' (munies par exemples des structures projectives pour les quelles les fibrations et équivalences sont définies termes à termes). On dispose alors de deux nouvelles S-catégories

$$\widehat{T} := Int(SPr(T)) \qquad \widehat{T'} := Int(SPr(T'))$$

formées des objets fibrants et cofibrants dans $SPr(T)$ et $SPr(T')$. On considère le sous ensemble simplicial

$$Map^c_{S-Cat}(\widehat{T}, \widehat{T'}) \subset Map_{S-Cat}(\widehat{T}, \widehat{T})$$

formée des morphismes qui commutent aux colimites homotopiques[3]. Alors, par exactement les mêmes arguments que ceux donnés pour les dg-catégories dans [To] on montre que le plongement de Yoneda $l : T \longrightarrow \widehat{T}$ induit un isomorphisme dans $Ho(SEns)$.

$$l^* : Map^c_{S-Cat}(\widehat{T}, \widehat{T'}) \longrightarrow Map_{S-Cat}(T, \widehat{T'}).$$

[3]Nous passons sous silence la notion générale de colimites homotopiques dans les S-catégories, que l'on peut définir par exemple à l'aide du plongement de Yoneda simplicial et de la notion usuelle dans les cmf de préfaisceaux simpliciaux.

Plus généralement, si M est une cmf simpliciale et $LM \simeq Int(M)$ sa localisée simpliciale, alors le morphisme

$$l^* : Map^c_{S-Cat}(\widehat{T}, LM) \longrightarrow Map_{S-Cat}(T, LM).$$

est une équivalence.

Maintenant, soit $LCSS$ la localisée simpliciale de CSS le long des équivalences. De même, soit $LSPr(\Delta)$ la localisé simpliciale de la cmf des préfaisceaux simpliciaux sur Δ. L'adjonction de Quillen

$$id : SPr(\Delta) \longrightarrow CSS \qquad SPr(\Delta) \longleftarrow CSS : id$$

induit des morphismes dans $Ho(S-Cat)$

$$l : LSPr(\Delta) \simeq \widehat{\Delta} \longrightarrow LCSS \qquad \widehat{\Delta} \longleftarrow LCSS : i,$$

tels que i soit pleinement fidèle (au sens des S-catégories) et avec $l \circ i = id$. On déduit de cela que le morphisme

$$Map^{eq}_{S-Cat}(LCSS, LCSS) \xrightarrow{l^*} Map^c_{S-Cat}(\widehat{\Delta}, LCSS) \simeq Map_{S-Cat}(\Delta, LCSS)$$

admet une rétraction. Ainsi, le morphisme

$$\mathbb{R}Aut(\Delta/LCSS) \longrightarrow Map_{\Delta/S-Cat}(\Delta, LCSS) \simeq *$$

admet aussi une rétraction. Ceci implique que $\mathbb{R}Aut(\Delta/LCSS) \simeq *$, ce qu'il fallait démontrer. $\square$

Proposition 6.2 *Tout auto-morphisme $f : LCSS \longrightarrow LCSS$ dans $Ho(S-Cat)$ préserve globalement l'image essentielle du foncteur $LC : \Delta \longrightarrow LCSS$.*

Preuve: On a clairement $f(*) \simeq *$. De plus, par la formule

$$C(n) \simeq C(1) \coprod_{*}^{\mathbb{L}} \dots C(1) \coprod_{*}^{\mathbb{L}} C(1)$$

on voit qu'il suffit de montrer que $f(C(1))$ est isomorphe dans $Ho(LCSS) \simeq Ho(CSS)$ à $C(1)$.

Pour cela, soit Cat_{rig} la catégorie des catégories rigides (i.e. dont les objets ne possèdent pas d'automorphismes non triviaux). Le foncteur nerf induit un foncteur pleinement fidèle $Cat_{rig} \longrightarrow Ho(CSS)$, et nous identifierons Cat_{rig} à son image essentielle par ce foncteur. Notons que le foncteur C se factorise en

$$C : \Delta \longrightarrow Cat_{rig} \longrightarrow Ho(CSS).$$

De plus, on peut caractériser la sous-catégorie pleine Cat_{rig} de $Ho(CSS)$ comme la sous-catégorie des objets 0-tronqués. Ainsi, l'auto-équivalence f préserve forcemment la sous-catégorie Cat_{rig}. Pour démontrer la proposition 6.2 il nous suffit donc de montrer que toute auto-équivalence de la catégorie Cat_{rig} fixe, à équivalence près, la catégorie I possèdant deux objets et un unique morphisme entre eux.

On remarque alors que I est l'unique objet (à équivalence près) possèdant les propriétés suivantes.

- On a $[*, I]_{CSS} \simeq * \coprod *$.
- I n'est pas isomorphe à $* \coprod *$.
- Les seuls sous-objets de I sont $\emptyset$, $*$, $* \coprod *$ et I.

Comme ces propriétés sont invariantes par toute auto-équivalence de Cat_{rig}, ceci termine la preuve de la proposition. $\Box$

Théorèm 6.3 *Il existe une équivalence de monoides simpliciaux*

$$\mathbb{R}Aut(LCSS) \simeq \mathbb{Z}/2.$$

Preuve: La proposition 6.2 implique que toute auto-équivalence de $LCSS$ induit une auto-équivalence de la catégorie Δ. Ainsi, on dispose d'un morphisme de monoides simpliciaux

$$\mathbb{R}Aut(LCSS) \longrightarrow \mathbb{R}Aut(\Delta).$$

Il est facile de voir que l'on a $\mathbb{R}Aut(\Delta) \simeq \mathbb{Z}/2$, la seule auto-équivalence non triviale de la catégorie Δ étant celle qui fixe les objets $[n]$ en qui permute les deux morphismes $[0] \rightrightarrows [1]$ (si on pense à Δ comme la catégorie des ensembles ordonés finis, cette auto-équivalence est celle qui renverse l'ordre). Notons $\sigma : \Delta \longrightarrow \Delta$ cet automorphisme. Il induit un automorphisme de la catégorie CSS, et donc de la S-catégorie $LCSS$. Ceci montre que le morphisme

$$\mathbb{R}Aut(LCSS) \longrightarrow \mathbb{R}Aut(\Delta)$$

est surjectif sur les π_0. De plus, la fibre homotopique de ce morphisme est par définition $\mathbb{R}Aut(\Delta/LCSS)$, qui est contractile par la proposition 6.1. Ceci finit la preuve du théorème. $\Box$

Références

[Be] J. Bergner, *A model category structure on the category of simplicial categories*, prépublication math.AT/0406507.

[Du] D. Dugger *Combinatorial model categories have presentations*, Adv. in Math. **164** (2001), 177-201.

[Hi-Si] A. Hirschowitz, C. Simpson, *Descente pour les n-champs*, pré-publication math.AG/9807049.

[Ho] M. Hovey, *Model categories*, Mathematical surveys and monographs, Vol. **63**, Amer. Math. Soc., Providence 1998.

[Jo] A. Joyal, *Quasi-categories*, en préparation.

[Le] T. Leinster, *A survey of definitions of n-category*, Theory and Applications of Categories, **10** (2002), 1-70.

[Pe] R. Pellissier, *Catégories enrichies faibles*, Thèse, Université de Nice-Sophia Antipolis, June 2002, pré-publication math.AT/0308246.

[Re] C. Rezk, *A model for the homotopy theory of homotopy theories*, Trans. Amer. Math. Soc. **353** (2001), no. 3, 973–1007.

[Si] C. Simpson, *Some properties of the theory of n-categories*, pré-publication math.CT/0110273.

[To] B. Toën, *The homotopy theory of dg-categories and derived Morita theory*, pré-publication math.AG/0408337.

[HAGI] B. Toën, G. Vezzosi, *Homotopical algebraic geometry I: Topos theory*, to appear in Adv. in Math.